

3.2 ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΙΣΟΣΚΕΛΟΥΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

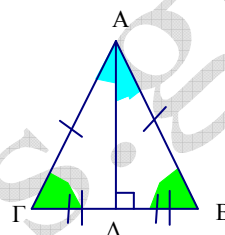
Άθροισμα γωνιών τριγώνου

Σε οποιοδήποτε τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών του είναι ίσο με 180°

2.

Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου

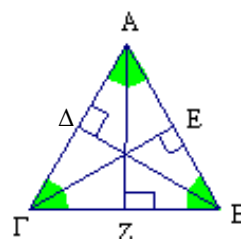
- Η ευθεία της διαμέσου που αντιστοιχεί στη βάση είναι άξονας συμμετρίας του ισοσκελούς τριγώνου.
- Η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση είναι ύψος και διχοτόμος.
- Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.



3.

Ιδιότητες ισοπλεύρου τριγώνου

- Η ευθείες των διαμέσων του είναι άξονες συμμετρίας του ισοπλεύρου τριγώνου.
- Κάθε διάμεσος είναι ύψος και διχοτόμος.
- Όλες οι πλευρές είναι ίσες.
- Όλες οι γωνίες είναι ίσες.



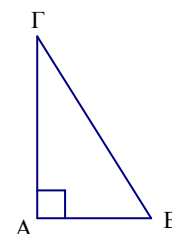
ΣΧΟΛΙΑ

1.

Οξείες γωνίες ορθογωνίου τριγώνου

Το άθροισμα των οξείων γωνιών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι 90° , δηλαδή είναι συμπληρωματικές.

Έτσι στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο ισχύει $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$

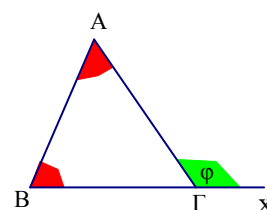


2.

Άθροισμα δύο γωνιών ενός τριγώνου

Το άθροισμα δύο γωνιών ενός τριγώνου ισούται με την εξωτερική της τρίτης γωνίας.

Στο διπλανό τρίγωνο ισχύει $\hat{A} + \hat{B} = \hat{\phi}$



3.

Γωνίες ισοπλεύρου τριγώνου : Στο ισόπλευρο τρίγωνο κάθε γωνία είναι 60°

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} = 40^\circ$ και $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Να υπολογιστούν οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

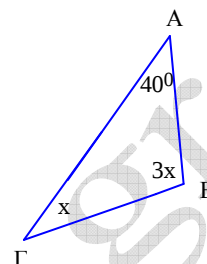
Προτεινόμενη λύση

Έστω το διπλανό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 40^\circ$.

Αν $\hat{\Gamma} = x$ τότε $\hat{B} = 3x$.

$$\begin{aligned} \text{Αλλά } \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} &= 180^\circ \quad \text{άρα} \quad 40^\circ + x + 3x = 180^\circ \\ 40^\circ + 4x &= 180^\circ \\ 4x &= 180^\circ - 40^\circ \\ 4x &= 140 \\ x &= 35^\circ \end{aligned}$$

Συνεπώς $\hat{\Gamma} = 35^\circ$ και $\hat{B} = 3 \cdot 35^\circ = 105^\circ$



2.

Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με βάση $B\Gamma$ ισχύει $\hat{A} = 2\hat{B}$. Να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου.

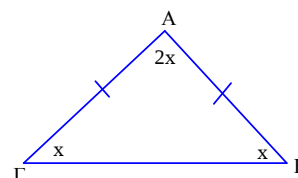
Προτεινόμενη λύση

Έστω $\hat{B} = x$. Τότε $\hat{\Gamma} = \hat{B} = x$ και $\hat{A} = 2x$.

Η ισότητα $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ γίνεται

$$\begin{aligned} x + x + 2x &= 180^\circ \\ 4x &= 180^\circ \\ x &= 45^\circ \end{aligned}$$

Συνεπώς $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$ και $\hat{A} = 90^\circ$



3.

Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις

- α) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διάμεσος που αντιστοιχεί στην βάση είναι ... και ...
 β) Κάθε γωνία ισοπλεύρου τριγώνου είναι ίση με
 γ) Στο ισόπλευρο τρίγωνο κάθε ... είναι διχοτόμος και ύψος
 δ) Το άθροισμα δύο γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο από
 ε) Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο οι οξείες γωνίες είναι

Προτεινόμενη λύση

α)

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διάμεσος που αντιστοιχεί στην βάση είναι **διχοτόμος** και **ύψος**.

β)

Κάθε γωνία ισοπλεύρου τριγώνου είναι ίση με **60°** .

γ)

Στο ισόπλευρο τρίγωνο κάθε **διάμεσος** είναι διχοτόμος και ύψος

δ)

Το άθροισμα δύο γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο από **180°**

ε)

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο οι οξείες γωνίες είναι **συμπληρωματικές**

4.

Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τη γωνία ω .

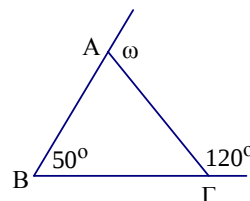
Προτεινόμενη λύση

$\widehat{A\hat{B}B} = 60^\circ$ ως παραπληρωματική της γωνίας των 120°

Τότε στο τρίγωνο ABΓ είναι $\widehat{A} + 50^\circ + 60^\circ = 180^\circ$

Άρα $\widehat{A} = 70^\circ$

Επομένως $\widehat{\omega} = 110^\circ$ ως παραπληρωματική της $\widehat{A}$

**5.**

Αν $AB = AG$ και η Γx είναι διχοτόμος να υπολογίσετε τη γωνία ϕ του διπλανού σχήματος.

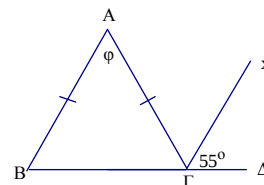
Προτεινόμενη λύση

Επειδή η Γx είναι διχοτόμος, θα είναι $\widehat{A\hat{G}\Delta} = 110^\circ$.

Επομένως $\widehat{A\hat{B}B} = 70^\circ$ ως παραπληρωματική της $\widehat{A\hat{G}\Delta}$.

Επειδή το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $AB = AG$, έχουμε $\widehat{B} = \widehat{A\hat{B}B} = 70^\circ$

Τότε στο τρίγωνο ABΓ είναι $\widehat{A} + 70^\circ + 70^\circ = 180^\circ$ άρα $\widehat{A} = 40^\circ = \widehat{\phi}$



6.

Να σχεδιάσετε ένα πεντάγωνο και να φέρετε τις διαγώνιες από μία κορυφή σε όλες τις υπόλοιπες κορυφές.

Να υπολογίσετε το άθροισμα των γωνιών του πενταγώνου.

Προτεινόμενη λύση

Έστω το πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ του διπλανού σχήματος

Στο τρίγωνο ΑΕΔ έχουμε : $\hat{A}_2 + \hat{E} + \hat{\Delta}_2 = 180^\circ$

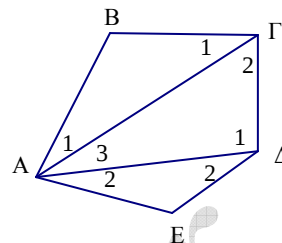
ομοίως στο ΑΔΓ $\hat{A}_3 + \hat{\Gamma}_2 + \hat{\Delta}_1 = 180^\circ$

στο ΑΒΓ $\hat{A}_1 + \hat{\Gamma}_1 + \hat{B} = 180^\circ$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ισότητες αυτές βρίσκουμε ότι

$$\hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \hat{A}_1 + \hat{E} + \hat{\Gamma}_2 + \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Delta}_2 + \hat{\Delta}_1 + \hat{B} = 540^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{E} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} + \hat{B} = 540^\circ$$



7.

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο μία γωνία του είναι ίση με τα $\frac{2}{3}$ μιας άλλης γωνίας του.

Να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου (να διακρίνετε δύο περιπτώσεις)

Προτεινόμενη λύση

Έστω $\hat{A} = 90^\circ$

Είναι φανερό ότι μόνο κάποια από τις οξείες γωνίες του τριγώνου μπορεί να είναι ίση με

τα $\frac{2}{3}$ κάποιας άλλης

$$1^{\text{η}} \text{ περίπτωση } \hat{B} = \frac{2}{3} \cdot \hat{A} = \frac{2}{3} \cdot 90^\circ = 60^\circ$$

$$\text{Τότε } \hat{\Gamma} = 30^\circ$$

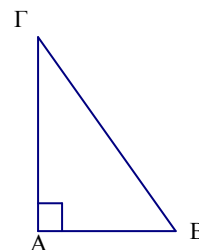
$$2^{\text{η}} \text{ περίπτωση } \hat{B} = \frac{2}{3} \cdot \hat{\Gamma}$$

$$\text{Αλλά } \hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \text{ άρα } \frac{2}{3} \cdot \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \text{ άρα}$$

$$\frac{5}{3} \cdot \hat{\Gamma} = 90^\circ$$

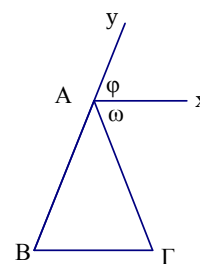
$$\hat{\Gamma} = 90^\circ : \frac{5}{3} = 90^\circ \cdot \frac{3}{5} = 54^\circ$$

$$\text{Τότε } \hat{B} = \frac{2}{3} \cdot 54^\circ = 36^\circ$$



8.

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$ και η $Ax \parallel B\Gamma$. Να δικαιολογήσετε το ότι η Ax είναι διχοτόμος της γωνίας $\Gamma \hat{A} y$.

**Προτεινόμενη λύση**

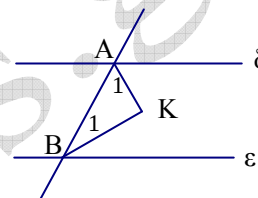
Επειδή $Ax \parallel B\Gamma$ είναι $\hat{\omega} = \hat{\Gamma}$ (1) ως εντός εναλλάξ
και $\hat{\phi} = \hat{B}$ (2) ως εντός εκτός

Όμως το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$, άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma}$
Τότε, από τις (1) και (2) θα είναι και $\hat{\omega} = \hat{\phi}$, άρα η Ax
είναι διχοτόμος της γωνίας $\Gamma \hat{A} y$

9.

Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon \parallel \delta$ και οι AK και BK
είναι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$.

Αν $B \hat{A} \delta = 120^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες
του τριγώνου ABK .

**Προτεινόμενη λύση**

Γνωρίζουμε ότι $B \hat{A} \delta + A \hat{B} \varepsilon = 180^\circ$ ως εντός και επί τα αυτά

$$120^\circ + A \hat{B} \varepsilon = 180^\circ$$

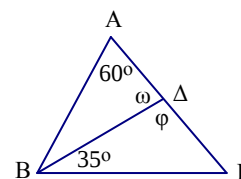
$$A \hat{B} \varepsilon = 60^\circ$$

$$\hat{A}_1 = \frac{B \hat{A} \delta}{2} = 60^\circ \quad \text{και} \quad \hat{B}_1 = \frac{A \hat{B} \varepsilon}{2} = 30^\circ \quad \text{λόγω των διχοτόμων.}$$

$$\begin{aligned} \text{Μετά από αυτά στο τρίγωνο } ABK \text{ έχουμε} \quad \hat{K} &= 180^\circ - \hat{B}_1 - \hat{A}_1 = \\ &= 180^\circ - 30^\circ - 60^\circ = \\ &= 90^\circ \end{aligned}$$

10

Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\omega}$, $\hat{\phi}$ και $\hat{\Gamma}$ στο διπλανό
σχήμα αν γνωρίζετε ότι η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$.

**Προτεινόμενη λύση**

Αφού η $B\Delta$ είναι διχοτόμος, θα είναι $A \hat{B} \Delta = 35^\circ$

Στο τρίγωνο $AB\Delta$ είναι $\hat{A} + A \hat{B} \Delta + \hat{\omega} = 180^\circ$

$$60^\circ + 35^\circ + \hat{\omega} = 180^\circ$$

$$\hat{\omega} = 85^\circ$$

$\hat{\phi} = 95^\circ$ ως παραπληρωματική της $\hat{\omega}$

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$

$$60^\circ + 70^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ$$

$$\hat{\Gamma} = 50^\circ$$

11.

Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon \parallel \delta$ να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Delta E$

Προτεινόμενη λύση

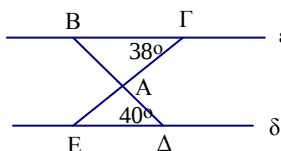
$\hat{B}\hat{\Gamma} = 40^\circ$ ως εντός εναλλάξ

$\hat{\Gamma}\hat{E}B = 38^\circ$ για τον ίδιο λόγο

στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{B}\hat{\Gamma} + 38^\circ + \hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 180^\circ$ άρα

$$40^\circ + 38^\circ + \hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 180^\circ \text{ επομένως } \hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 102^\circ$$

τότε και $\hat{E}\hat{A}\hat{\Delta} = 102^\circ$ ως κατακορυφήν

**12.**

Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$ του διπλανού σχήματος.

Προτεινόμενη λύση

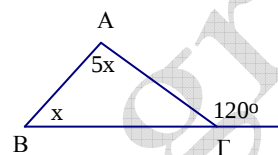
Είναι $\hat{A}\hat{\Gamma}B = 60^\circ$ ως παραπληρωματική της γωνίας των 120°

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $5x + x + 60^\circ = 180^\circ$

$$6x = 120^\circ$$

$$x = 20^\circ$$

Δηλαδή $\hat{B} = 20^\circ$ και $\hat{A} = 100^\circ$

**13.**

Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon \parallel \delta$. Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Delta E$.

Προτεινόμενη λύση

$\hat{A}\hat{\Delta}E = 70^\circ$ ως παραπληρωματική της γωνίας των 110°

$\hat{\Gamma}\hat{E}\Delta = 50^\circ$ ως παραπληρωματική τη γωνίας των 130°

Στο τρίγωνο $A\Delta E$ έχουμε $\hat{A} + \hat{A}\hat{\Delta}E + \hat{\Gamma}\hat{E}\Delta = 180^\circ$

$$\hat{A} + 70^\circ + 50^\circ = 180^\circ$$

$$\hat{A} = 60^\circ$$

$\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{\Delta}E = 70^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά

$\hat{A}\hat{\Gamma}B = \hat{\Gamma}\hat{E}\Delta = 50^\circ$ για τον ίδιο λόγο

